CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2004

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

Durée : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le problème comporte six parties qui sont très largement indépendantes.

Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.

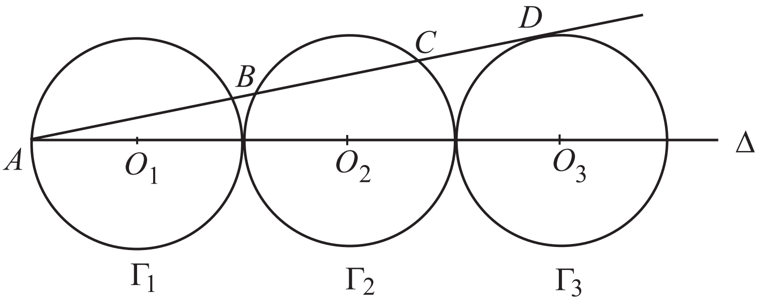
De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Partie I : une famille de cercles tangents

Dans le plan, soit A un point et Δ une demi-droite d'origine A.

1- On considère trois cercles $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ de même rayon r non nul, de centres respectifs $O_1,\ O_2,\ O_3$ distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ. Le cercle Γ_1 passe par A et le cercle Γ_2 est tangent aux cercles Γ_1 et Γ_3

Les diamètres des cercles $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ sur la demi-droite Δ sont notés respectivement $[AA_1],\ [A_1A_2]$ et $[A_2A_3]$.



Par le point A, on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_3.

a) Montrer que la droite (AD) coupe le cercle Γ_2 en deux points distincts B et C. Calculer la longueur BC.

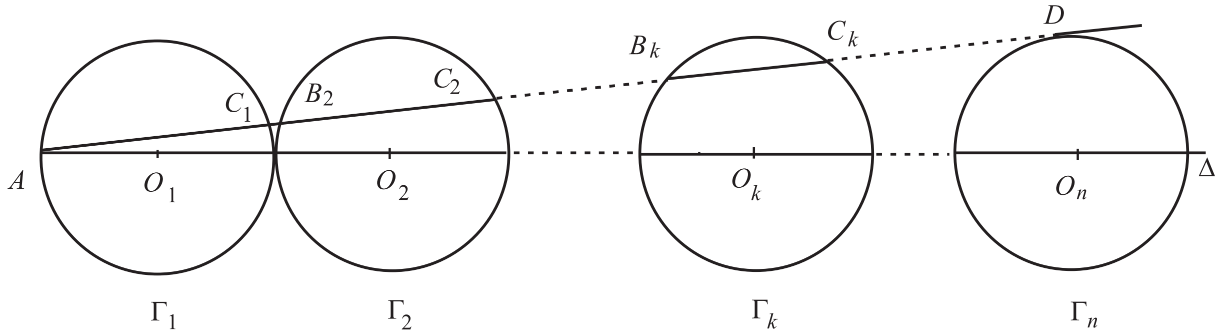
b) Montrer que les droites (BA_1) et (CA_2) sont sécantes ; on note P leur point d'intersection.

Montrer de même que les droites (CA_1) et (BA_2) sont sécantes ; on note Q leur point d'intersection.

Que peut-on dire de la direction de la droite (PQ) ?

2- Plus généralement, on considère un entier n strictement supérieur à 1 et n cercles $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots,\ \Gamma_n$ de même rayon r strictement positif, de centres respectifs $O_1, O_2, \ldots, O_n$ distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite Δ. Le cercle Γ_1 passe par A et, pour tout $k > 1$, le cercle Γ_k est tangent au cercle Γ_{k-1}.

Les diamètres des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ sur la droite Δ sont notés respectivement $[AA_1], [A_1A_2], \ldots, [A_{n-1}A_n]$.



Par le point A, on mène une droite (AD) tangente en D au cercle Γ_n. Montrer que, pour tout k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, cette droite coupe le cercle Γ_k en deux points distincts B_k et C_k (on remarque que $B_1 = A$).

a) Calculer la longueur B_kC_k en fonction de n, de k et de r.

Dans toute la suite du problème, on prend $r = 1$. On pose $L(n,k) = B_kC_k$.

b) Montrer que pour que $L(n,k)$ soit rationnel il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$$(\mathcal{C}_1) \qquad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(n-1) - k(k-1) = 4a^2$$

Partie II : étude d'une surface

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$. Les coordonnées (respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote) d'un point sont notées x, y et z.

On considère l'ensemble Σ des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ vérifiant

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

1- Soit λ un réel et P_λ le plan d'équation $x = \lambda$.

Montrer que l'intersection de Σ et de P_λ est un cercle C_λ dont on déterminera, en fonction de λ, le centre et le rayon.

2- Soit I le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ et (d) la droite passant par I de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$.

Montrer que la droite (d) est un axe de symétrie de Σ. Déterminer et dessiner l'intersection de Σ et du plan d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3- Reconnaître la nature de l'ensemble Σ.

4- Soit un entier n strictement supérieur à 2 et un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Montrer que $L(n,k)$ est rationnel si, et seulement si, les points de Σ d'abscisse n et d'ordonnée k ont pour cote un nombre entier pair.

Partie III : étude d'une limite

À partir de la configuration étudiée au I.2, on définit λ_n comme la proportion du segment $[AD]$ située à l'intérieur des cercles (Γ_k), pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi, on a $\lambda_n = \dfrac{1}{AD}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} B_kC_k$.

1- Calculs d'intégrales

On définit la fonction f, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$,

puis la fonction F, de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = f(\sin x)$.

a) Montrer que la fonction F est dérivable et calculer sa dérivée, notée F'.

b) Montrer que, pour tout x dans $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

c) Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur commune des deux intégrales.

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$; interpréter géométriquement ce résultat.

2- a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\lambda_n = \dfrac{2}{2n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}}$.

b) Montrer que si $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{k-1}{n-1} \leqslant \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

c) On pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que pour des valeurs convenables de n et k, que l'on précisera, on a :

$$nI_{n,k+1} \leqslant \sqrt{1-\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}} \leqslant nI_{n,k-1}$$

3- Démontrer, à partir des résultats des questions 1 et 2 ci-dessus, que la suite (λ_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie IV : étude de la condition ($\mathcal{C}_1$)

On considère deux entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

1- On pose $p = 2n-1$ et $q = 2k-1$. Montrer que le couple $(n,\, k)$ vérifie la condition $\mathcal{C}_1$ si, et seulement si, $(p,\, q)$ est un couple d'**entiers naturels impairs** tels que $q < p$, vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$ suivante :

$$(\mathcal{C}_2) \qquad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^2 - q^2 = 16a^2$$

2- Soit $(p,\, q)$ un couple de nombres entiers naturels, tel qu'il existe deux entiers $u > 0$ et $v > 0$, de parités différentes, pour lesquels $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Montrer que $(p,\ q)$ est un couple d'entiers naturels impairs tels que $q < p$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$.

3- On considère un couple $(p,\, q)$, d'entiers naturels impairs et premiers entre eux, tels que $q < p$ et vérifiant la condition $(\mathcal{C}_2)$. Montrer qu'il existe deux entiers naturels u et v de parités différentes tels que $p = u^2 + v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Calculer alors, en fonction de u et de v, la valeur de l'entier a qui intervient dans la condition $(\mathcal{C}_2)$.

Partie V : nombre premier somme de deux carrés

On se propose dans cette partie de déterminer tous les nombres premiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers naturels. On désignera plus simplement un tel nombre comme étant « somme de deux carrés ».

1- a) Montrer que si n est un entier naturel impair somme de deux carrés, il est congru à 1 modulo 4.

b) Écrire 2 et 5 comme somme de deux carrés.

Dans la suite de la partie V, p désigne un nombre premier congru à 1 *modulo* 4 *et strictement supérieur à* 5*. On l'écrit sous la forme $p = 4m+1$ (avec $m > 2$).*
On définit $S = \big\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \;\big|\; 4xy + z^2 = p\big\}$.

2- a) Montrer que S est un ensemble fini non vide et que l'intersection de S et de l'ensemble d'équation $x = y+z$ est vide.

b) À tout triplet $(x,\, y,\, z)$ de S, on associe le triplet $(x',\, y',\, z')$ défini par

$$(x',\, y',\, z') = \begin{cases} (x-y-z,\, y,\, 2y+z) & \text{si } x > y+z \\ (y+z-x,\, x,\, 2x-z) & \text{si } x < y+z \end{cases}$$

Montrer que pour tout $(x,\, y,\, z)$ de S, $(x',\, y',\, z')$ est aussi élément de S.

On considère désormais la suite de triplets dans S définie en itérant le procédé précédent de la manière suivante :

- *On part du triplet $(x_0,\, y_0,\, z_0) = (m,\, 1,\, 1)$;*
- *$(x_k,\, y_k,\, z_k)$ ayant été défini dans S, on prend $x_{k+1} = x'_k,\ y_{k+1} = y'_k,\ z_{k+1} = z'_k$.*

3- a)*Étude d'un cas particulier*. Dans cette question seulement, on prend $m = 10$. Déterminer les triplets $(x_k,\, y_k,\, z_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 11$.

b) Montrer que si $(a,\, b,\, c) = (x_k,\, y_k,\, z_k)$, avec $k \geqslant 2$, alors le triplet $(x_{k-1},\, y_{k-1},\, z_{k-1})$ est :

$$\begin{cases} (a-b+c,\, b,\, c-2b) & \text{si } a-4b+2c > 0 \\ (b,\, a-b+c,\, 2b-c) & \text{si } a-4b+2c < 0 \end{cases}$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour $k = 1$.

c) Montrer qu'il existe deux entiers distincts k et ℓ tels que $(x_k,\, y_k,\, z_k) = (x_\ell,\, y_\ell,\, z_\ell)$.
En déduire qu'il existe un entier n strictement positif tel que $(x_n,\, y_n,\, z_n) = (m,\, 1,\, 1)$.

On note désormais n le plus petit entier strictement positif tel que

$$(x_n,\, y_n,\, z_n) = (m,\, 1,\, 1).$$

4- a) Calculer $(x_{n-1},\, y_{n-1},\, z_{n-1})$ et $(x_{n-2},\, y_{n-2},\, z_{n-2})$.

b) Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$(x_{j-1},\, y_{j-1},\, z_{j-1}) = \begin{cases} (x_{n-j},\, y_{n-j},\, -z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} > y_{j-1} + z_{j-1} \\ (y_{n-j},\, x_{n-j},\, z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} < y_{j-1} + z_{j-1} \end{cases}$$

c) Montrer que n est impair. On pose désormais $n = 2r + 1$.

d) Montrer que $x_r = y_r$. En déduire qu'il existe une décomposition de p en somme de deux carrés.

5- a) Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de décomposer p en somme de deux carrés.

b) Donner le plus petit nombre premier supérieur à 40 qui est somme de deux carrés et, à l'aide de cet algorithme, en préciser une décomposition (on indiquera les triplets calculés aux différentes étapes de l'itération).

Partie VI : retour au problème initial

1- Soit n et m deux entiers naturels somme de deux carrés, $n = a^2 + b^2$, $m = c^2 + d^2$. En introduisant les nombres complexes $a + \mathrm{i}\, b$ et $c + \mathrm{i}\, d$ et en considérant $n = |a + \mathrm{i}\, b|^2$ et $m = |c + \mathrm{i}\, d|^2$, montrer que le produit mn est un entier somme de deux carrés et en donner explicitement une décomposition en fonction de a, b, c et d.

2- On se propose de démontrer, pour tout entier n strictement positif, la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « tout nombre premier qui divise $n^2 + 1$ est somme de deux carrés ».

Pour cela, on procède par récurrence sur n.

a) Montrer que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose la proposition $\mathcal{P}(i)$ vraie pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ et on considère un nombre premier p qui divise $n^2 + 1$.

i) Montrer que p est différent de n.

ii) On suppose $p < n$. Montrer que p divise $(n - p)^2 + 1$.

iii) On suppose $p > n$ et $p < n^2 + 1$. Montrer que les autres diviseurs premiers de $n^2 + 1$ sont strictement inférieurs à n. En déduire, en discutant selon la parité de n, que p est congru à 1 modulo 4.

iv) Montrer que p est somme de deux carrés.

c) Conclure.

3- a) Pour s entier supérieur ou égal à 2, on note p_s le plus petit diviseur premier du nombre $(s!)^2 + 1$.

Montrer que $p_s > s$ et que p_s est somme de deux carrés.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers somme de deux carrés.

4- a) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(n,\, k)$ avec $1 \leqslant k < n$ tels que $L(n,\, k)$ soit rationnel.

b) Déterminer un entier n tel qu'il existe plusieurs valeurs de k pour lesquelles $L(n,\, k)$ est rationnel.

* * *
*

Concours général 2004 : corrigé

Partie I

1) a) Soit H le projeté orthogonal de O_2 sur AD.

En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ADO_3 : $\dfrac{O_2H}{O_3D} = \dfrac{AO_2}{AO_3}$, donc $O_2H = \dfrac{3R}{5}\cdot$

Comme $O_2H < R$, la droite (AD) coupe bien le cercle en deux points B et C. De plus, ces points vérifient d'après le théorème de Pythagore : $HB = HC = \sqrt{R^2 - O_2H^2} = \dfrac{4R}{5}$ et $BC = \dfrac{8R}{5}\cdot$

b) Si (A_1B) et (A_2C) étaient parallèles, on pourrait utiliser le théorème de Thalès dans le triangle AA_2C et on aurait :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{1}{2},$$

ce qui est impossible car $AB > 2R$ et $BC < 2R$. Donc A_1B et A_2C sont sécantes en un point P.

Comme $[A_1, A_2]$ est un diamètre, A_1BA_2 est rectangle en B, donc (A_2B) est une hauteur de PA_1A_2. De même, (A_1C) est une hauteur de ce triangle, donc les droites (A_1C) et (A_2B) sont sécantes en Q orthocentre du triangle PA_1A_2. On en déduit que la droite (PQ) est la hauteur issue de P et (PQ) est orthogonale à Δ.

2) a) Comme précédemment, d'après le théorème de Thalès, en notant H le projeté orthogonal de O_k sur AD :

$$\frac{O_kH}{O_nD} = \frac{AO_k}{AO_n} = \frac{2k-1}{2n-1} \text{ donc } O_kH = \frac{2k-1}{2n-1}r.$$

D'après le théorème de Pythagore : $HB_k = HC_k = \sqrt{r^2 - \dfrac{(2k-1)^2}{(2n-1)^2}r^2}$, donc $B_kC_k = 4\dfrac{\sqrt{n^2-n-k^2+k}}{2n-1}r$ et

$$L(n,k) = \frac{4}{2n-1}\sqrt{n(n-1)-k(k-1)}.$$

b) Soit m un nombre entier, alors $\sqrt{m}$ est un entier ou est un nombre irrationnel. En effet :
$\rightarrow$ Si la factorisation de m en produit de nombres premiers est de la forme $m = p_1^{2\alpha_1}\cdots p_\ell^{2\alpha_\ell}$, le nombre $\sqrt{m}$ est entier.

$\rightarrow$ Sinon, la factorisation de m contient au moins un nombre premier à une puissance impaire, disons $m = p_1^{2\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2}\cdots$

Si on avait $\sqrt{m} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers premiers entre eux, on aurait $a^2 = b^2p_1^{2\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2}\ldots$.
Ainsi le nombre premier p_1 apparaîtrait dans la factorisation de a, et apparaîtrait à une puissance paire dans la factorisation de a^2. Par conséquent b^2 serait divisible par p_1 et b aussi, ce qui est contradictoire avec a et b premiers entre eux.

Donc $L(n,k)$ est rationnel si et seulement si $n(n-1)-k(k-1)$ est le carré d'un entier et comme $n(n-1)-k(k-1)$ est pair, ce ne peut être que le carré d'un nombre entier pair. D'où la condition $\mathcal{C}_1$.

Partie II

1) En coupant par $x = \lambda$, on trouve l'équation $z^2 + y(y-1) = \mu$, où $\mu = \lambda(\lambda-1)$. On remarque que $\mu = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{4}$. L'équation trouvée est équivalente à $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \mu + \frac{1}{4}$.

Comme $\mu + \dfrac{1}{4} \geqslant 0$, il s'agit du cercle, éventuellement réduit à un point pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$ de centre $\left(\lambda, \frac{1}{2}, 0\right)$ de rayon $\sqrt{\mu + \dfrac{1}{4}} = \left|\lambda - \dfrac{1}{2}\right|$ et contenu dans le plan P_λ.

2) Soit M de coordonnées (x,y,z). Son symétrique orthogonal par rapport à (d) est le point M' de coordonnées $(1-x, 1-y, -z)$. Vu l'équation donnée pour Σ, M appartient à Σ si et seulement M' y appartient : (d) est axe de symétrie de Σ.

Chercher l'intersection du plan P d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ et de Σ conduit donc à l'équation : $z^2 = x(x-1) + \dfrac{1}{4}$, qui est équivalente à $z^2 = \big(x - \dfrac{1}{2}\big)^2$ soit à $\big(z - x + \dfrac{1}{2}\big)\big(z + x - \dfrac{1}{2}\big) = 0$. Il s'agit de la réunion de deux droites, passant par I, symétriques par rapport au plan $(O, \vec{i}, \vec{j}\,)$ et perpendiculaires.

3) Finalement Σ est un cône de révolution, d'axe la droite d'équation $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$, de sommet I et de demi-angle d'ouverture $\dfrac{\pi}{4}\cdot$

4) Application directe de la conclusion de **I. 2. b)**.

Partie III

1) a) f est dérivable comme primitive d'une fonction continue, de dérivée $f'(x) = \sqrt{1 - x^2}$, et sin est dérivable, donc la composée F est dérivable et, sur $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$

$$F'(x) = \cos x \times f'(\sin x) = \cos x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos^2 x.$$

b) $F(0) = 0$ donc $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos^2 t \,\mathrm{d}t$. **c)** On fait le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \,\mathrm{d}t$$

La somme des intégrales est $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$. **d)** Ainsi $\dfrac{\pi}{4} = F\big(\dfrac{\pi}{2}\big) = f(1) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \,\mathrm{d}t$.

Or, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, cette intégrale est l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ et les verticales d'abcisses 0 et 1, il s'agit donc de l'aire du quart de disque de centre O et de rayon 1.

2) a) Il suffit de reprendre la formule de **I. 2 .a)** :

$$\lambda_n = \frac{1}{AD} \sum_{k=1}^{n-1} B_k C_k = \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2 - 1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{2n-1} \sqrt{n(n-1) - k(k-1)} = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k(k-1)}{n(n-1)}}$$

(on pourrait convenir de sommer jusqu'à n, en posant $A_n = B_n = D$).

b) D'une part : $\dfrac{k}{n} \times \dfrac{k-1}{n-1} = \dfrac{k-1}{n} \times \dfrac{k}{n-1} \geqslant \dfrac{k-1}{n} \times \dfrac{k-1}{n}\cdot$

D'autre part : $-n \leqslant -k$ donc $(k-1)n \leqslant k(n-1)$ et $\dfrac{k-1}{n-1} \leqslant \dfrac{k}{n}$ d'où $\dfrac{k}{n} \times \dfrac{k-1}{n-1} \leqslant \Big(\dfrac{k}{n}\Big)^2$.

Ainsi, pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n$: $\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big)^2 \leqslant \dfrac{k}{n} \times \dfrac{k-1}{n-1} \leqslant \Big(\dfrac{k}{n}\Big)^2$

c) La fonction $t \mapsto 1 - t^2$ est positive et décroissante sur $[0, 1]$, il en est donc de même de la fonction $t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$. Ainsi pour $t \in \Big[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\Big]$, avec $1 \leqslant k \leqslant n - 1$:

$\sqrt{1 - \Big(\dfrac{k}{n}\Big)^2} \leqslant \sqrt{1 - t^2} \leqslant \sqrt{1 - \Big(\dfrac{k-1}{n}\Big)^2}$ et, par conservation des inégalités par intégration :

$$\frac{1}{n}\sqrt{1 - \Big(\frac{k}{n}\Big)^2} \leqslant I_{n,k} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1 - \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^2}$$

Vu le **2. b)**, pour $n \geqslant 3$ et $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, on a :

$$nI_{n,k+1} \leqslant \sqrt{1 - \Big(\frac{k}{n}\Big)^2} \leqslant \sqrt{1 - \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1}} \leqslant \sqrt{1 - \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^2} \leqslant nI_{n,k-1}.$$

3) En sommant les encadrements précédents, il vient, pour $n \geqslant 3$:

$$\frac{2n}{2n-1}\sum_{k=2}^{n-1} I_{n,k+1} \leqslant \lambda_n - \frac{2}{2n-1} \leqslant \frac{2n}{2n-1}\sum_{k=2}^{n-1} I_{n,k-1},$$

soit : $$\frac{2n}{2n-1}\int_{2/n}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda_n - \frac{2}{2n-1} \leqslant \frac{2n}{2n-1}\int_0^{(n-2)/n}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{2/n}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{n}$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_{(n-2)/n}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{n}$, les deux intégrales écrites ci-dessus ont pour limite $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ lorsque n tend vers l'infini, d'où l'on déduit : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \frac{\pi}{4}\cdot$

Partie IV

1) $\mathcal{C}_1$ est équivalente à $(2n-1)^2 - (2k-1)^2 = 16a^2$ *i.e.* à $p^2 - q^2 = 16a^2$.
p et q doivent être impairs par construction et $k \leqslant n-1$ donne $q < p$. **2)** Si u et v sont de parités différentes, u^2 et v^2 également, donc p et q sont impairs.
De plus $p^2 - q^2 = 4u^2v^2 = 16a^2$, car on peut mettre 4 en facteur dans le carré pair.
Posons $\alpha = \dfrac{p+q}{2}$ et $\beta = \dfrac{p-q}{2}$, qui sont bien des entiers car p et q sont impairs. La condition $\mathcal{C}_2$ donne $\alpha\beta = 4a^2$.
Or comme p et q sont premiers entre eux, il existe des entiers r et s tels que $rp + sq = 1$ soit $1 = r(\alpha+\beta) + s(\alpha-\beta) = (r+s)\alpha + (r-s)\beta$: α et β sont également premiers entre eux.
Comme leur produit est un carré, chacun des deux doit être un carré ; il existe donc u, v tels que $\alpha = u^2$ et $\beta = v^2$, soit $p = u^2+v^2$ et $q = u^2 - v^2$. Enfin, u et v doivent être de parités différentes pour que p et q soient impairs.
Par ailleurs : $4a^2 = u^2v^2$, d'où $a = \dfrac{uv}{2}\cdot$

Partie V

1) a) S'il existe u et v tels que $n = u^2 + v^2$, ceux-ci doivent être de parités différentes puisque n est impair. Supposons par exemple $u = 2k$, $v = 2\ell+1$, k et ℓ entiers.
Alors : $n = 4k^2 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 \equiv 1 \pmod 4$. **b)** $2 = 1^2 + 1^2$ et $5 = 1^2 + 2^2$.

2) a) $(m,1,1) \in S$ donc $S \neq \emptyset$. Si $(x,y,z) \in S$, on ne peut avoir $x = 0$ ou $y = 0$ (sinon $z^2 = p$ et p ne serait pas premier) on a donc pour tout (x,y,z) de S : $1 \leqslant x \leqslant p$, $1 \leqslant y \leqslant p$ et $-p \leqslant z \leqslant p$.
Chacune des coordonnées ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, donc S est fini. Si (x,y,z) vérifiait $\begin{cases} z^2 + 4xy = p \\ x = y + z \end{cases}$, alors $p = (x-y)^2 + 4xy = (x+y)^2$, ce qui contredit que p est premier. Ainsi, l'intersection de S avec le plan d'équation $x = y+z$ est vide.

b) $\star$ Si $x > y+z$, alors $(x',y',z') = (x-y-z, y, 2y+z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ et :
$4x'y' + z'^2 = 4xy - 4y^2 - 4yz + 4y^2 + 4yz + z^2 = 4xy + z^2 = p$, donc $(x',y',z') \in S$.

$\star\star$ Si $x < y+z$, alors $(x',y',z') = (y+z-x, x, 2x-z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ et :
$4x'y' + z'^2 = 4xy + 4xz - 4x^2 + 4x^2 - 4xz + z^2 = 4xy + z^2 = p$, donc $(x',y',z') \in S$.

3) a) Ici $m = 10$ (notons que dans ce cas $p = 41$ est premier). On obtient alors la succession de triplets : $(10,1,1) \underset{\star}{\longrightarrow} (8,1,3) \underset{\star}{\longrightarrow} (4,1,5) \underset{\star\star}{\longrightarrow} (2,4,3) \underset{\star\star}{\longrightarrow} (5,2,1) \underset{\star}{\longrightarrow} (2,2,5) \underset{\star\star}{\longrightarrow} (5,2,-1) \underset{\star}{\longrightarrow} (4,2,3) \underset{\star\star}{\longrightarrow} (1,4,5) \underset{\star\star}{\longrightarrow} (8,1,-3) \underset{\star}{\longrightarrow} (10,1,-1) \underset{\star}{\longrightarrow} (10,1,1)$.

b) Si (a,b,c) est un élément de la suite, il ne peut avoir comme antécédent que $(a-b+c, b, c-2b)$ ou $(b, a-b+c, 2b-c)$, et ce à condition que $a-b+c > 0$.

Si on pose $\begin{cases} u = a-b+c \\ v = b \\ w = c - 2b \end{cases}$, on remarque que ces deux antécédents sont (u,v,w) et $(v,u,-w)$. Ils ne peuvent eux-mêmes avoir un antécédent que si, respectivement $u - v + w = a - 4b + 2c > 0$ ou $v - u - w > 0$.

Ces deux conditions ne peuvent être vérifiées en même temps. On en déduit donc que tout point (a,b,c) de la suite d'indice au moins 2 a pour antécédent :

$$\begin{cases} (a-b+c,b,c-2b) & \text{si } a-4b+2c>0 \\ (b,a-b+c,-c+2b) & \text{si } a-4b+2c<0 \end{cases}$$

Par ailleurs, $(x_1,y_1,z_1)=(m-2,1,3)$ a pour antécédent $(x_0,y_0,z_0)=(m,1,1)$, ce qui coïncide bien avec la relation ci-dessus.

c) S étant fini, la suite ne peut pas prendre une infinité de valeurs distinctes, on obtiendra donc à un moment un triplet déjà obtenu auparavant, d'où l'existence de k et ℓ, avec par exemple $k>\ell$ tels que $(x_k,y_k,z_k)=(x_\ell,y_\ell,z_\ell)$.

Si $\ell=0$, alors $n=k$ convient.

Si $\ell\geqslant 1$, alors $(x_k,y_k,z_k)=(x_\ell,y_\ell,z_\ell)$, donne par unicité de l'antécédent $(x_{k-1},y_{k-1},z_{k-1})=(x_{\ell-1},y_{\ell-1},z_{\ell-1})$ $\dots$, $(x_{k-\ell},y_{k-\ell},z_{k-\ell})=(x_0,y_0,z_0)=(m,1,1)$ et on peut prendre $n=k-\ell$.

4) a) Comme $m>2$, l'image du triplet $(m,1,1)$ est le triplet $(m-2,1,3)$, donc n est au moins égal à 2.
Alors $(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})=(m,1,-1)=(x_0,y_0,-z_0)$;
puis $(x_{n-2},y_{n-2},z_{n-2})=(m-2,1,-3)=(x_1,y_1,-z_1)$.

b) Supposons $(x_{j-1},y_{j-1},z_{j-1})=(x_{n-j},y_{n-j},-z_{n-j})$, avec $x_{j-1}>y_{j-1}+z_{j-1}$, alors on a :
$(x_j,y_j,z_j)=(x_{j-1}-y_{j-1}-z_{j-1},y_{j-1},2y_{j-1}+z_{j-1})$.

$\star$ Si $x_j>y_j+z_j$, *i.e.* $x_{j-1}-4y_{j-1}-2z_{j-1}=x_{n-j}-4y_{n-j}+2z_{n-j}>0$, on trouve :

$$(x_{n-j-1},y_{n-j-1},z_{n-j-1})=(x_{n-j}-y_{n-j}+z_{n-j},y_{n-j},z_{n-j}-2y_{n-j})=(x_j,y_j,-z_j).$$

$\star$ Si $x_j<y_j+z_j$, *i.e.* $x_{j-1}-4y_{j-1}-2z_{j-1}=x_{n-j}-4y_{n-j}+2z_{n-j}<0$, on trouve :

$$(x_{n-j-1},y_{n-j-1},z_{n-j-1})=(y_{n-j},x_{n-j}-y_{n-j}+z_{n-j},-z_{n-j}+2y_{n-j})=(y_j,x_j,z_j).$$

On fait de même dans le cas $(x_{j-1},y_{j-1},z_{j-1})=(y_{n-j},x_{n-j},z_{n-j})$ avec $x_{j-1}<y_{j-1}+z_{j-1}$, ce qui termine la récurrence.

c) Enfin, il ne peut exister de triplet (x_k,y_k,z_k) tel que $(x_{k+1},y_{k+1},z_{k+1})=(x_k,y_k,-z_k)$ ou $(x_{k+1},y_{k+1},z_{k+1})=(y_k,x_k,z_k)$, car cela imposerait $y_k=-z_k$ ou $x_k=y_k=z_k$, ce qui est impossible sur S pour p premier.
Ce qui assure qu'il y a un nombre impair d'éléments dans notre bout de suite.

d) Le terme (x_r,y_r,z_r) au milieu doit être image d'un triplet (a,b,c) et antécédent du triplet $(a,b,-c)$ ou (b,a,c) ce qui ne peut se produire que pour $x_r=y_r$ et alors $p=(2x_r)^2+z_r^2$.
Nous venons donc de montrer que tout nombre premier de la forme $4m+1$ est somme de deux carrés.

5) a) Clair : il suffit de programmer l'algorithme décrit en **2) b)**, jusqu'à obtenir un triplet de la forme (x,x,z).
b) Le plus petit nombre premier supérieur à 40 et qui est somme de deux carrés est 41. Au cours de la question **3) a)** nous avons obtenu dans la chaîne de triplets le triplet $(2,2,5)$, ce qui prouve que $41=4\times2\times2+5^2=4^2+5^2$.

Partie VI

1) $mn=|(a+ib)(c+id)|^2=|x+iy|^2=x^2+y^2$ avec $\begin{cases} x=ac-bd \\ y=bc+ad \end{cases}$. **2) a)** $\star$ $1^2+1=2$ et $2^2+1=5$ sont premiers et somme de deux carrés, donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

$\star$ $3^2+1=10$, de diviseurs premiers 2 et 5 qui sont sommes de deux carrés et $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

b) i) On a $n^2+1=n(n+\dfrac{1}{n})$ et $n+\dfrac{1}{n}$ n'est pas entier, donc n ne divise pas n^2+1.

ii) Si $p<n$, on écrit : $(n-p)^2+1=(n^2+1)-2pn+p^2$ et p divise les trois termes donc divise $(n-p)^2+1$.
L'hypothèse de récurrence assure alors que p, qui est premier, est somme de deux carrés, donc congru à 1 modulo 4.

iii) On suppose $p>n$ et $p<n^2+1$, donc $n^2+1=pq$, avec $q<n$ (sinon $pq\geqslant(n+1)^2>n^2+1$) et $q>1$ et les diviseurs premiers de n^2+1 autres que p sont les diviseurs premiers de q, donc sont compris entre 2 et $n-1$.

$\rightarrow$ Si n est pair, alors n^2+1 est congru à 1 modulo 4 et tous les diviseurs premiers de q sont impairs, donc par **ii)** sont somme de deux carrés et sont congrus à 1 modulo 4. Ainsi q est congru à 1 modulo 4 et p aussi.

$\rightarrow$ Si n est impair, alors n^2+1 est congru à 2 modulo 4 et $n^2+1 = p{\times}2q'$, avec q' impair. Ainsi, par **ii)** les diviseurs premiers de q' sont impairs sommes de deux carrés et sont congrus à 1 modulo 4. Donc q' est congru à 1 modulo 4 et il en est de même de p.

iv) Si n^2+1 est premier, alors $p = n^2+1$ est somme de deux carrés. Sinon, les questions précédentes montrent que $p = 2$ (qui est somme de deux carrés) ou que p est congru à 1 modulo 4, donc est somme de deux carrés.

c) En supposant $\mathcal{P}(i)$ vraie jusqu'au rang $n-1$, nous venons de montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On conclut alors par le principe de récurrence.

3) a) Soit $N = (s!)^2 + 1$; N n'est pas divisible par 2, 3, $\ldots n$, donc son plus petit facteur premier p_s est strictement supérieur à n, et somme de deux carrés d'après **2)**.

b) Ainsi, pour tout entier naturel n, on peut trouver un nombre premier somme de deux carrés supérieur à n. L'ensemble de ces nombres n'est donc pas majoré et il contient une infinité d'éléments.

4) a) On prend p premier impair somme de deux carrés (on peut choisir p d'une infinité de façons) : $p = u^2+v^2$, avec $u > v$, on prend $q = u^2 - v^2$; $n = \dfrac{p+1}{2}$; $k = \dfrac{q+1}{2}$, alors, d'après les résultats de la partie **IV**, $L(n,k)$ est rationnel : il existe bien une infinité de couples (n,k) tels que $L(n,k)$ soit rationnel.

b) Par exemple : $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$. Avec les notations précédentes on a donc $n = 33$ et $k = 32$ ou $k = 17$.

Ainsi $L(33,32)$ et $L(33,17)$ sont rationnels.