CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2008

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I

On munit le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit S la courbe d'équation

$$y=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de S ?
2. Pour tout couple (u,v) de nombre réels on note U le point de coordonnées (u,v), et pour x dans $\mathbf{R}$ on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x. On pose

$$f_U(x)=UM(x),\qquad g_U(x)=\left[f_U(x)\right]^2.$$

   (a) Calculer g_U, g_U', et g_U''. Résoudre l'équation $g_U''(x)=0$.

   (b) Donner le tableau des variations de f_U (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent en M à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coincident.

   Soit U un point du plan n'appartenant pas à S, et soit a dans $\mathbf{R}$. Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à S si et seulement si $g_U'(a)=0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

   (b) Pour U n'appartenant pas à S, on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S. Pour $1\leqslant i\leqslant 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U)=i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2-16v^3$.

   Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.

5. (a) Soit a dans $\mathbf{R}$. On note $D(a)$ la tangente en $M(a)$ à S. Donner une équation de $D(a)$.

   (b) On note de nouveau U le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (u,v). Discuter en fonction de u et v l'ensemble des solutions a de l'équation $U\in D(a)$.

   (c) On suppose que l'équation $U\in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2. Montrer que, si $UM(a_1)=UM(a_2)$, alors on a $u=0$.

   (d) Soit $U\in\mathscr{P}$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N de S. Montrer que les tangentes à S en M et N sont concourantes, et que si l'on note V leur point d'intersection on a $VM=VN$.

   (e) Déterminer l'ensemble des points U n'appartenant pas à S pour lesquels il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts de S.

Exercice II

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées Oy. À toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à Oy on associe les points A', B' et C' intersections de $\mathscr{D}$ avec les parallèles à Oy menées par A, B et C respectivement.

   Montrer qui existe une unique droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme s des longueurs $AA'+BB'+CC'$ est minimale, et la caractériser.

2. Montrer qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme s_1 des distances de A, B et C à $\mathscr{D}$ est minimale. Montrer que cette droite est unique si ABC n'est pas isocèle, et la caractériser.

Exercice III
Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
   - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
   - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

   Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?

Concours général 2008
Mathématiques
Éléments de correction

Exercice I

1) S est une parabole, dont le sommet est le point de coordonnées $(0, -3/2)$.

2-a) On a

$$g_U(x) = (x-u)^2 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2,$$

$$g'_U(x) = 2(x-u) + \frac{4x}{3}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{4v}{3}x - 2u,$$

$$g"_U(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4v}{3}.$$

Posons $\Omega_U = \{x \in \mathbf{R} | \; g''_U(x) = 0\}$ On a $\Omega_U = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = v\}$. Donc $\Omega_U = \emptyset$ si $v < 0$, $\Omega_U = \{0\}$ si $v = 0$, et $\Omega_U = \{-\sqrt{v}, \sqrt{v}\}$ si $v > 0$.

2-b) Si $v \leq 0$, on a $g''_U(x) > 0$ pour $x \neq 0$,et $g''_U(0) \geq 0$, donc g'_U est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g'_U(x) = +\infty$, on voit que dans ce cas il existe un unique réel x_0 tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ si $x \in]-\infty, x_0[$ tandis que $g'(x) > 0$ si $x \in]x_0, +\infty[$. Donc g_U est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$ et g_U est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Supposons maintenant que $v > 0$. Alors $g''_U(x) = \frac{4}{3}(x-\sqrt{v})(x+\sqrt{v})$, donc g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{v}, \sqrt{v}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$.
On a donc $g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v})$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} g'_U(-x)g'_U(x) &= \left(-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4v}{3}x - 2u\right)\left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{4v}{3}x - 2u\right) = 4u^2 - \frac{16}{9}x^2\left(\frac{x^2}{3} - v\right)^2 \\ &= 4u^2 - \frac{16}{81}x^2(x^2 - 3v)^2. \end{aligned}$$

En particulier on a

$$g'_U(-\sqrt{v})g'_U(\sqrt{v}) = 4u^2 - \frac{64}{81}v^3 = \frac{4}{81}(81u^2 - 16v^3).$$

Si $81u^2 - 16v^3 > 0$, on a deux possibilités
-ou bien $g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v}) > 0$. Dans ce cas $g'_U(x) \geq g'_U(\sqrt{v}) > 0$ pour tout $x \geq -\sqrt{v}$. Comme g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, et comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]-\infty, -\sqrt{v}[$ tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x < x_0$ tandis que $g'_U(x) > 0$ pour $x > x_0$.

-ou bien $g'_U(\sqrt{v}) < g'_U(-\sqrt{v}) < 0$. Dans ce cas $g'_U(x) \leq g'_U(-\sqrt{v}) < 0$ pour $x \leq \sqrt{v}$. Comme g'_U est strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$, et comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = +\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]\sqrt{v}, +\infty[$ tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x < x_0$ tandis que $g'_U(x) > 0$ pour $x > x_0$.

De même si $81u^2 - 16v^3 = 0$, on a deux possibilités
-ou bien $g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v}) = 0$. Dans ce cas $g'_U(x) > g'_U(\sqrt{v}) = 0$ pour tout $x \in [-\sqrt{v}, \sqrt{v}[\cup]\sqrt{v}, +\infty[$. Comme g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, et comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$, on voit qu'il

existe un unique $x_0 \in]-\infty, -\sqrt{v}[$ tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x < x_0$ tandis que $g'_U(x) > 0$ pour $x \in]x_0, \sqrt{v}[\cup]\sqrt{v}, +\infty[$.

-ou bien $0 = g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v})$. Dans ce cas $g'_U(x) < g'_U(-\sqrt{v}) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{v}[\cup]-\sqrt{v}, +\sqrt{v}]$. Comme g'_U est strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$, et comme $\lim_{x\to\infty} g'_U(x) = +\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]\sqrt{v}, +\infty[$ tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -\sqrt{v}[\cup]-\sqrt{v}, x_0[$ tandis que $g'_U(x) > 0$ pour $x > x_0$.

Comme $81u^2 - 16v^3 \geq 0$ si $v \leq 0$ on voit que si $81u^2 - 16v^3 \geq 0$ il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ telle que g_U soit strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Comme $f_U = \sqrt{g_U}$, et comme la fonction $x \to \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on voit que f_U est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2-c) Supposons maintenant que $U \notin W$. On a alors $81u^2 - 16v^3 < 0$. En particulier $v > 0$ et g'_U(-$\sqrt{v})g'_U(\sqrt{v}) < 0$. Donc $g'_U(-\sqrt{v}) > 0 > g'_U(\sqrt{v})$. Comme g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{v}, \sqrt{v}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]-\infty - \sqrt{v}[$, un unique $x_1 \in]-\sqrt{v}, \sqrt{v}[$ et un unique $x_2 \in]\sqrt{v}, +\infty[$ tels que $g'_U(x_0) = g'_U(x_1) = g'_U(x_2) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, x_0[$, $g'_U(x) > 0$ pour $x \in]x_0, x_1[$, $g'_U(x) < 0$ pour $x \in]x_1, x_2[$ et que $g'_U(x) > 0$ pour $x \in]x_2, +\infty[$. De même que plus haut, ceci entraine que f_U est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$, strictement croissante sur $[x_0, x_1]$, strictement décroissante sur $[x_1, x_2]$ et strictement croissante sur $[x_2, +\infty[$.

3) Soit $a \in R$, et soit C le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$. La tangente en $M(a)$ à S a pour vecteur directeur $\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}$, et le vecteur $\overrightarrow{UM_a} = (a-u)\vec{i} + (\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v)\vec{j}$ est orthogonal à la tangente en $M(a)$ à C. On voit donc que les tangentes à C et S en $M(a)$ coincident si et seulement si $\left(\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}\right).\left((a-u)\vec{i} + (\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v)\vec{j}\right) = 0$. On a

$$\left(\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}\right).\left((a-u)\vec{i} + (\frac{a^2}{3} - v)\vec{j}\right) = (a-u) + \frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) = \frac{g'_U(a)}{2}.$$

Par conséquent les tangentes à C et S en $M(a)$ coincident si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4-a) Soit $M \in \mathcal{P}\backslash S$. On sait d'après la question précédente que le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent à S en $M(x)$ si et seulement si $g'_U(x) = 0$. D'autre part g'_U est une fonction polynômiale de degré 3, donc l'équation $g'(x) = 0$ possède au plus trois racines réelles. Comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$, et comme $\lim_{x\to+\infty} g'_U(x) = +\infty$, cette équation possède au moins une racine réelle. Donc $n(U)$ ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3.

4-b) D'après la discussion des questions 2-c et 2-d, on sait que si $81u^2 - 16v^3 > 0$, alors l'équation $g'_U(x) = 0$ possède une solution sur $\mathbf{R}$, et que si $81u^2 - 16v^2 < 0$ alors l'équation $g'_U(x) = 0$ possède trois solutions distinctes sur $\mathbf{R}$. On a vu également que si $v > 0$, et si $81u^2 - 16v^3 = 0$, alors l'équation $g'_U(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur $\mathbf{R}$. Comme $81u^2 - 16v^3 > 0$ pour $v < 0$, il ne reste plus qu'à examiner le cas où $u = v = 0$. Dans ce cas $g'_U(x) = \frac{4x^3}{9}$, donc léquation $g'_U(x) = 0$ admet 0 comme unique solution. On obtient la classification suivante, pour $U \in \mathcal{P} \setminus S$, :

-si $81u^2 - 16v^3 > 0$, ou si $u = v = 0$, alors $n(U) = 1$;

-si $81u^2 - 16v^3 = 0$, avec $v > 0$, alors $n(U) = 2$;

-si $81u^2 - 16v^3 < 0$, alors $n(U) = 3$.

5-a) La droite $D(a)$ a pour équation $y - \frac{a^2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2a}{3}(x-a)$, ce qui donne $a^2 - 2ax + +3(y + \frac{3}{2}) = 0$.

5-b) L'équation $U \in D(a)$ est équivalente à l'équation

$$a^2 - 2au + 3(v + \frac{3}{2}) = 0.$$

On reconnait une équation du second degré, avec $\Delta' = u^2 - 3(v + \frac{3}{2}) = 3(\frac{u^2}{3} - \frac{3}{2} - v)$. Donc si $v > \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, il n'y a pas de solution, si $v = \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, il y a une solution et une seule, et si $v < \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, il y a deux solutions distinctes. Ceci s'interprète géométriquement : si U est situé au dessus de S, il n'y a pas de solution, si $u \in S$, il y a une solution et une seule, et si U est situé en dessous de S, il y a deux solutions distinctes.

Notons que si $U \in S$ la solution unique est $a = u$, ce qui traduit le fait évident que si $U \in S$ alors $U \in D(u)$.

5-c) Comme a_1 et a_2 sont les deux solutions de l'équation $a^2 - 2au + +3(v + \frac{3}{2}) = 0$, on a $a_1 + a_2 = 2u$ et $a_1 a_2 = 3(v + \frac{3}{2})$. Si $UM(a_1) = UM(a_2)$, on a $g_U(a_1) - g_U(a_2) = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
0 &= (u - a_1)^2 - (u - a_2)^2 + \left(v - \frac{a_1^2}{3} + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(v - \frac{a_2^2}{3} + \frac{3}{2}\right)^2 \\
&= (2u - a_1 - a_2)(a_2 - a_1) + \frac{a_2^2 - a_1^2}{3}\left(2v - \frac{a_1^2 + a_2^2}{3} + 3\right) \\
&= \frac{2u}{3}(a_2 - a_1)\left(2v - \frac{(a_1 + a_2)^2}{3} + \frac{2}{3}a_1 a_2 + 3\right) = \frac{2u}{3}(a_2 - a_1)\left(2v - \frac{4u^2}{3} + 2v + 6\right) \\
&= \frac{8u}{3}(a_2 - a_1)\left(v - \frac{u^2}{3} + \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

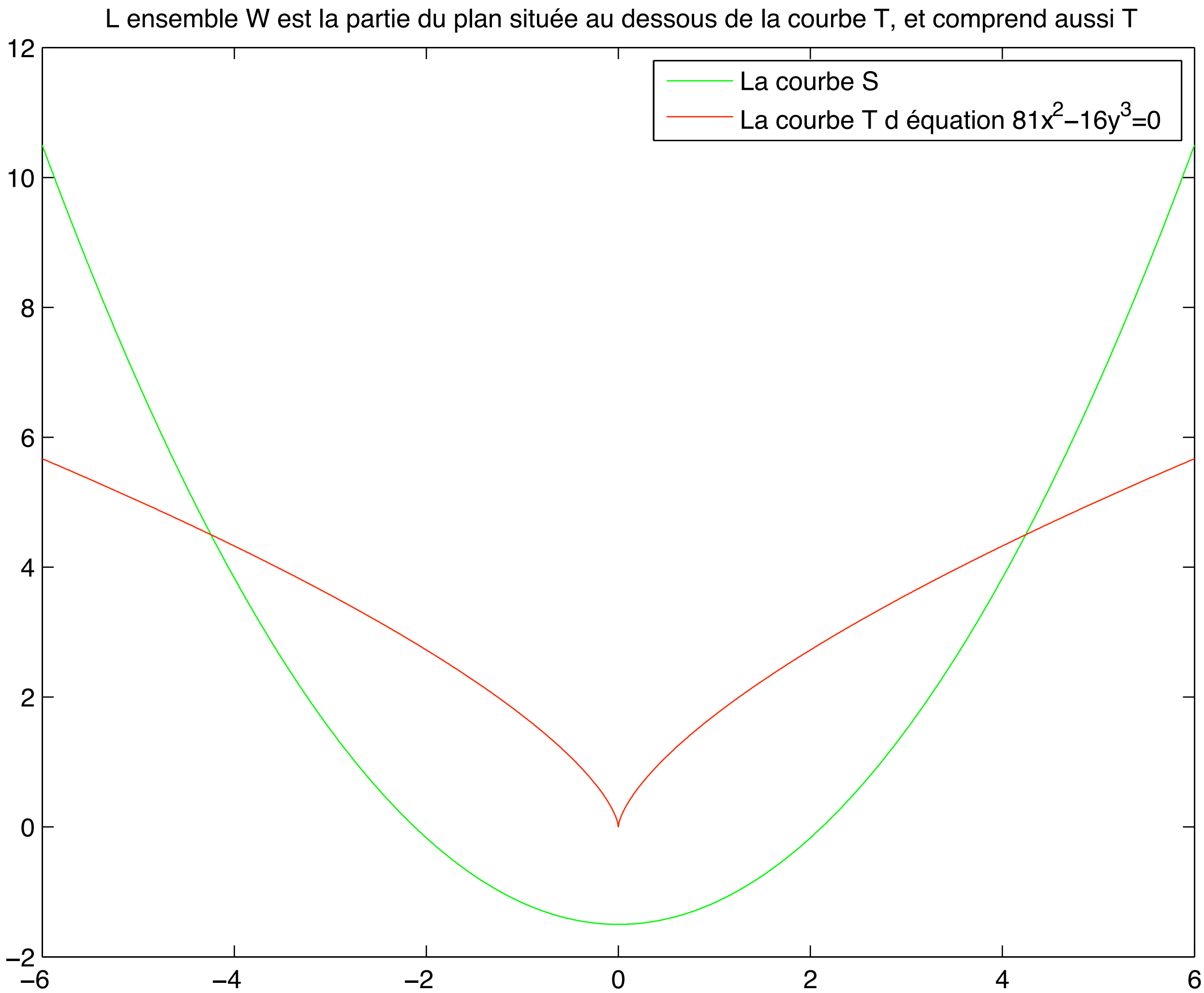
Comme $a_1 \neq a_2$, il résulte de la question précédente que $v - \frac{u^2}{3} + \frac{3}{2} < 0$, et on obtient $u = 0$.

5-d) La pente de la tangente en $M(a)$ à S étant égale à $\frac{2a}{3}$, les tangentes à S en deux points distincts de S sont concourantes. Supposons maintenant que U est le centre d'un cercle tangent à S en deux points distincts M et N de S, et soit V le point d'intersection des tangentes en M et N à S. Alors U appartient à la médiatrice D de MN, les droites (UM) et (UN) sont symétriques par rapport à D, et les droites (VM) et (VN), qui sont respectivement orthogonales à (UM) et (UN), sont également symétriques par rapport à D. Leur point d'intersection V appartient donc à D, et $VM = VN$.

5-e) Supposons de nouveau que U est le centre d'un cercle tangent à S en deux points distincts M et N de S, et soit V le point d'intersection des tangentes en M et N à S. Il résulte de la question 5-c que V appartient à l'axe Oy. Comme S est symétrique par rapport à Oy, la symétrique de la droite (VM) par rapport à Oy est tangente à S au point M_1 symétrique de M par rapport à Oy. Donc $M_1 = N$. Comme $(UM) \perp (VM)$, et comme $(UN) \perp (VN)$, on voit que (UM) et (UN) sont symétriques par rapport à Oy, et $U \in Oy$. On a $M = M(a)$, avec $a \neq 0$. Soit v l'ordonnée de U. On a $(UM(a)) \perp D(a)$, donc

$$\begin{aligned}
0 &= \left(a\vec{i} + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)\vec{j}\right).\left(\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}\right) \\
&= a + \frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3} - v\right) - a = \frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3} - v\right).
\end{aligned}$$

Donc $v = \frac{a^2}{3} > 0$.



Réciproquement supposons que U a pour coordonnées $(0, v)$, avec $v > 0$. Posons $a = \sqrt{3v}$. Le calcul précédent montre que la droite $(UM(a))$ est perpendiculaire à la tangente à S en $M(a)$ et que la droite $(UM(-a))$ est perpendiculaire à la tangente à S en $M(-a)$.

Comme $U \in Oy$, et comme $M(a)$ et $M(-a)$ sont symétriques par rapport à Oy, on a $UM(a) = UM(-a)$, et le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent à S en $M(a)$ et $M(-a)$.

On voit donc qu'il existe un cercle de centre U tangent en deux points distincts à S si et seulement si U est un point de l'axe Oy d'ordonnée strictement positive.

Exercice II

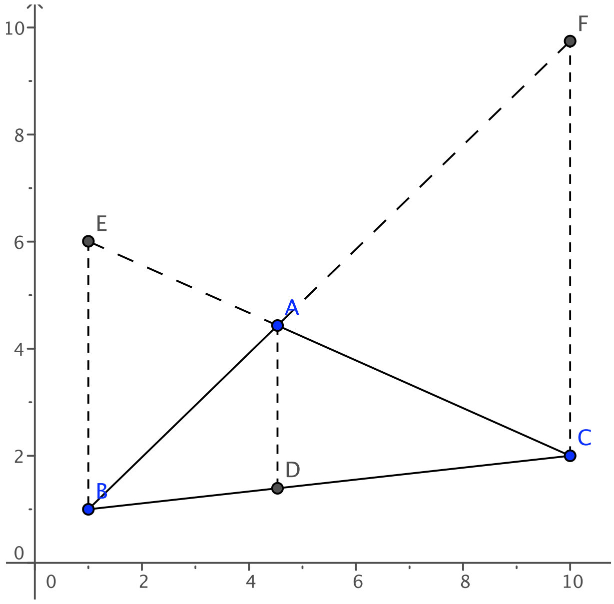
1. Soit $y = mx + p$ l'équation de $\mathscr{D}$, (a, a') (b, b') et (c, c') les cordonnées cartésiennes de A, B et C respectivement. Par hypothèse a, b et c sont distincts.L'expression de s est

$$s = f(m, p) = |ma + p - a'| + |mb + p - b'| + |mc + p - c'|.$$

Fixons m et supposons par exemple $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, où $\alpha = a' - ma$, $\beta = b' - mb$ et $\gamma = c' - mc$. La fonction $p \mapsto f(m, p)$ est continue, affine sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ et $[\gamma, +\infty[$, avec comme pentes sur ces intervalles -3, -1, 1 et 3 respectivement. Elle atteint, dans ce cas de figure, son minimum strict en β.
On en déduit que l'on peut se limiter à étudier les droites passant par un sommet du triangle.
Supposons que la droite $\mathscr{D}$ passe par A. On a donc $p = a' - ma$ et

$$s = |m(b - a) + a' - b'| + |m(c - a) + a' - c'|.$$

s est encore continue, affine par morceaux et de pente croissante. Sa pente change aux points $\dfrac{b'-a'}{b-a}$ et $\dfrac{c'-a'}{c-a}$, pentes des côtés AB et AC, et elle atteint donc un minimum strict lorsque $\mathscr{D}$ est un côté du triangle.



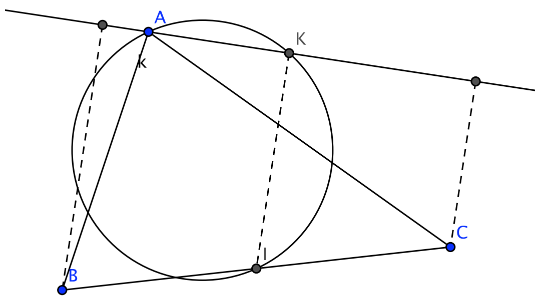
L'examen de la figure montre que le minimum absolu strict est atteint sur le côté dont les sommets ont les abscisses extrêmes.

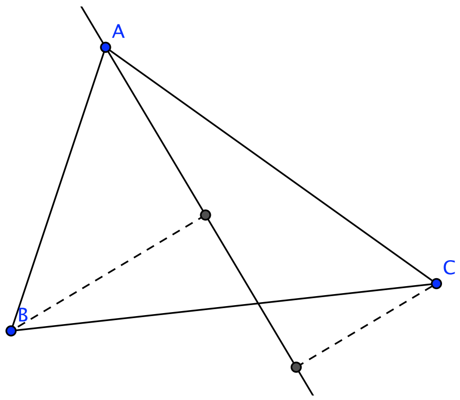
2. L'expression de s_1 est analogue :

$$s_1 = g(m,p) = \frac{|ma+p-a'|+|mb+p-b'|+|mc+p-c'|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

et le même raisonnement qu'à la question précédente montre que parmi les droites de pente donnée, un minimum absolu strict est atteint pour une droite passant par un sommet du triangle.

Considérons les droites $\mathscr{D}$ passant par A :





Lorsque $\mathscr{D}$ est extérieure au triangle, s_1 vaut deux fois la longueur IK, où I est le milieu de BC et K son projeté sur $\mathscr{D}$. K se trouve sur le cercle de diamètre IA et s_1 est minimal lorsque la droite $\mathscr{D}$ égale (AB) ou (AC).

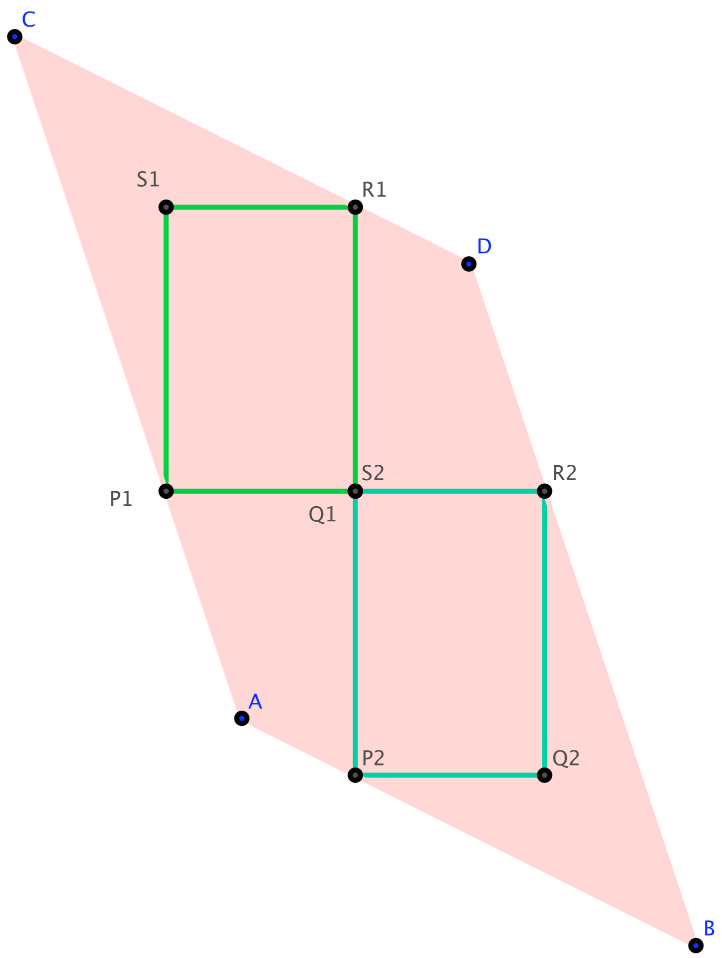
Lorsque $\mathscr{D}$ est intérieure au triangle, s_1 est la mesure de la projection orthogonale de $[BC]$ sur une direction orthogonale à $\mathscr{D}$. Elle est maximale si $\mathscr{D}$ est la hauteur issue de A (si cette dernière est intérieure au triangle) et minimale lorsque la droite $\mathscr{D}$ égale (AB) ou (AC) — en effet la fonction cos est décroissante sur $[0,\pi]$.

Le minimum de s_1 est atteint pour le côté correspondant à la hauteur la plus courte, c'est à dire le côté le plus long.

Exercice III

1. Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

   Les deux tickets donnent les informations suivantes sur le prix r du kilo de côtelettes et le prix s du kilo de rôti :
   $$\begin{cases} \lfloor 0{,}75r \rfloor + \lfloor 0{,}25s \rfloor & = & 18 \\ \lfloor 0{,}25r \rfloor + \lfloor 0{,}50s \rfloor & = & 17 \end{cases}$$
   qui entraînent les inégalités
   $$\begin{cases} 18 & \leqslant & 0{,}75r + 0{,}25s & < & 20 \\ 17 & \leqslant & 0{,}25r + 0{,}50s & < & 19 \end{cases}$$
   Ces inégalités permettent de situer le point de coordonnées (r, s) dans le parallélogramme $ABDC$ représenté ci-dessous



   dont les sommets ont pour coordonnées $A(15{,}2, 26{,}4)$, $B(18{,}4, 24{,}8)$, $C(13{,}6, 31{,}2)$ et $D(16{,}8, 29{,}6)$. On sait en particulier que $13{,}6 \leqslant x < 18{,}4$ et $24{,}8 \leqslant y < 31{,}2$.

   - La fonction $x \mapsto \lfloor 0{,}75x \rfloor$ change de valeur tous les multiples de $\dfrac{4}{3}$;
   - la fonction $x \mapsto \lfloor 0{,}25x \rfloor$ change de valeur tous les multiples de 4 ;
   - la fonction $y \mapsto \lfloor 0{,}5y \rfloor$ change de valeur tous les multiples de 2 ;

– la fonction $y \mapsto \lfloor 0{,}25y \rfloor$ change de valeur tous les multiples de 4.

Supposons $r \in \left[\dfrac{4k}{3}, \dfrac{4(k+1)}{3}\right[$ et $s \in \left[2k', 2(k'+1)\right[$, on a les tableaux :

k	10	11	12	13	14
$\lfloor 0{,}75r \rfloor$	10	11	12	13	14
$\lfloor 0{,}25r \rfloor$	3	3	4	4	4

k'	12	13	14	15
$\lfloor 0{,}25s \rfloor$	6	6	7	7
$\lfloor 0{,}50s \rfloor$	12	13	14	15

qui permettent de constater que les solutions sont données par $(k, k') = (11, 14)$ ou $(k, k') = (12, 13)$, soit $(r, s) \in \left[\dfrac{44}{3}, 16\right[\times [28, 30[\cup \left[16, \dfrac{52}{3}\right[\times [26, 28[$, ensemble représenté par les rectangles $P_1Q_1R_1S_1$ et $P_2Q_2R_2S_2$ dans la figure.

2. Supposons que les prix des produits vendus soient notés $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ (il y a un nombre fini de produits à vendre). Le ticket de caisse numéro k fournit une information du type

$$(E_k) \qquad \lfloor \lambda_{k,1} x_1 \rfloor + \cdots + \lfloor \lambda_{k,p} x_p \rfloor = b_k$$

équation dont le p-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est solution. Or, pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \lfloor \lambda x \rfloor$ est constante sur un petit intervalle de la forme $[a_p, a_p + \varepsilon[$.

On peut alors montrer par récurrence sur k la propriété suivante : il existe $\eta_k > 0$ tel que tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_i \in [a_i, a_i + \eta_k[$ pour tout i, sont solutions de (E_1), (E_2), …, (E_k). En effet, en supposant η_k construit (on peut poser $\eta_0 = 1$), on considère $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ tels que $\lfloor \lambda_{k+1,i} x \rfloor$ soit constant sur $[a_i, a_i + \varepsilon_i[$. Il suffit alors de poser $\eta_{k+1} = \min(\eta_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$.

Au final, l'ensemble des prix satisfaisant aux n tickets de la journée contient un produit d'intervalles de longueur strictement positive. Il ne sera donc possible de déterminer aucun des prix exacts des produits vendus.